UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

MATEM
Matemática Para la Enseñanza Media

Cálculo

I Examen Parcial 2023

Sábado 22 de abril

Instrucciones

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.
2. Este examen consta de 3 partes: selección única (3 puntos), respuesta corta (9 puntos) y desarrollo (32 puntos).
3. La prueba está diseñada para ser resuelta en máximo 2 horas y 30 minutos. A quienes inicien tarde no se les repondrá el tiempo perdido.
4. La prueba debe resolverse individualmente.
5. **Anote en su cuaderno de examen todas las respuestas de las tres partes del examen** en forma clara, ordenada, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Las respuestas anotadas en el enunciado de la prueba no serán tomadas en cuenta.
6. En los **ítems de selección única**, usted deberá indicar en el cuaderno de examen el número de ítem e indicar la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Sólo se calificará la opción de respuesta seleccionada que se encuentre escrita en el cuaderno de examen.
7. Para responder la parte de desarrollo debe incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta. Si alguna respuesta o procedimiento está desordenado, éste no se calificará.
8. Recuerde que puede utilizar calculadora científica, que no sea programable ni graficadora.

I parte: Selección única

Escriba en el cuaderno de examen la letra que antecede a la respuesta que usted considere correcta. (3 puntos, un punto cada respuesta correcta)

1. Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante. Se define la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & \text{si } x \leq a \\ x^2 + x & \text{si } x > a \end{cases}$$

¿Cuál de los siguientes valores de a hacen que h sea una función continua en todo su dominio?

A) $a = -2$

B) $a = 0$

C) $a = 1$

D) $a = -1$

2. Considere las siguientes proposiciones:

I. $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{|x-4|}{4-x} = -1$

II. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$

Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

A) Solo la I

B) Solo la II

C) Ambas

D) Ninguna

3. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con criterio $f(x) = e^x$. De los siguientes límites, ¿cuál determina el valor de $f'(0)$?

   A) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^h + 1}{h}$.

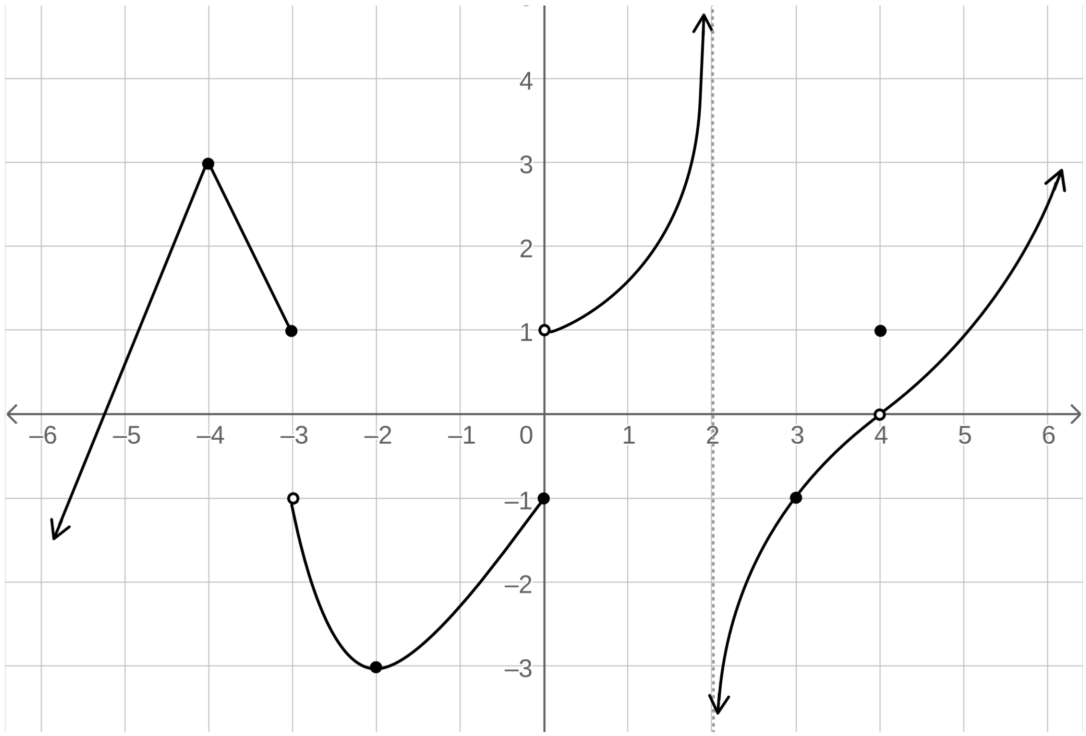
   B) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$.

   C) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^h - h}{h}$.

   D) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^h}{h}$.

II parte: Respuesta Corta

En la siguiente imagen se presenta la gráfica de una función f. Determine lo que se le solicita y anote su respuesta en el cuaderno de examen. (9 puntos)



1. $f'(-2) =$
2. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$
3. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$
4. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$
6. ¿Existe $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$?
7. La ecuación de la asíntota vertical.
8. Un valor de x donde existe una discontinuidad evitable.
9. Un valor del dominio donde la función es continua pero no es derivable.

III parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Determine las ecuaciones de las asíntotas verticales de la función f, definida en su dominio máximo, con criterio

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 6x}{x^2 - 9}$$

(6 puntos)

2. Calcule los siguientes límites:

A) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$ (4 puntos)

B) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)(x+1)}$ (5 puntos)

C) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^4 - 3x}}{5x^2 - 3x + 1}$ (5 puntos)

3. Determine la derivada de la función

$$h(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{e^x} + \sqrt{\ln(x)}$$

No es necesario simplificar el resultado. (7 puntos)

4. Considere la función p, definida en su dominio máximo, con criterio

$$p(x) = e^{x + \ln(x+1)}.$$

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función p en el punto $(0, 1)$. (5 puntos)

Fin del examen

Proyecto MATEM-Cálculo

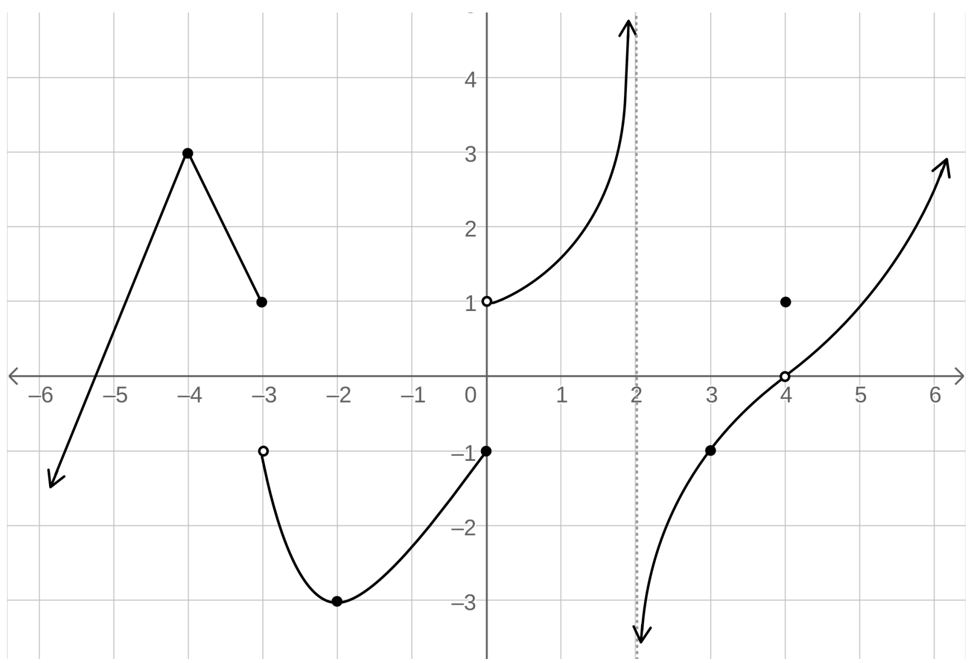
I Examen Parcial 2023- Solucionario

I parte: Selección única

1. B **2.** C **3.** B

II parte: Respuesta Corta

En la siguiente imagen se presenta la gráfica de una función f, determine lo que se le solicita. (9 puntos)



1. $f'(-2) = 0$
2. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -1$
3. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$
4. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
6. ¿Existe $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$? No existe
7. La ecuación de la asíntota vertical. $x = 2$

8. Un valor de x donde existe una discontinuidad evitable. $x = 4$

9. Un valor del dominio donde la función es continua pero no es derivable. $x = -4$

III parte: Desarrollo

1. Determine las ecuaciones de las asíntotas verticales de la función f, definida en su dominio máximo, con criterio
$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 6x}{x^2 - 9}$$

   Para encontrar las asíntotas verticales, determinamos las indefiniciones de la función:
$$\frac{x^3 - x^2 - 6x}{x^2 - 9} = \frac{x(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)}$$

   La función se indefine en $x = 3$ y $x = -3$. Por un lado,
$$\lim_{x \to 3} \frac{x(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x(x+2)}{x+3} = \frac{5}{2}.$$

   Así, $x = 3$ no es asíntota vertical. Por otro lado,
$$\lim_{x \to -3} \frac{x(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to -3} \frac{x(x+2)}{x+3}$$

   El límite anterior tiene la forma $\frac{3}{0}$, por lo que sus límites laterales serán infinitos. Es decir, $x = -3$ sí es asíntota vertical.

   Distribución de puntos:

   - ▷ 1pt factorización del numerador
   - ▷ 1pt factorización del denominador
   - ▷ 1pt determinar indefiniciones de la función
   - ▷ 1pt cálculo del límite cuando $x \to 3$
   - ▷ 1pt determinar límites laterales cuando $x \to -3$
     **no es necesario que calculen los valores propiamente, basta con que indiquen que son infinitos por la forma del límite.
   - ▷ 1pt concluir la ecuación de la asíntota vertical

2. Calcule los siguientes límites:

A) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$

El límite tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Realizamos racionalización:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \sqrt{x+4}+2 = 4
\end{aligned}$$

Distribución de puntos:

- ▷ 1pt fracción de racionalización adecuada
- ▷ 1pt aplicar la fórmula de diferencia de cuadrados
- ▷ 1pt simplificar la fracción
- ▷ 1pt evaluar el límite

B) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)(x+1)}$

El límite tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Realizamos el cambio de variable:

$$u = x-2 \quad \Rightarrow \quad u+3 = x+1, \quad u \to 0$$

Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)(x+1)} &= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u(u+3)} \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} \cdot \frac{1}{u+3} \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{1}{u+3} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Distribución de puntos:

- ▷ 1pt cambio de variable
- ▷ 1pt separar la fracción en producto
- ▷ 1pt separar en producto de límites
- ▷ 1pt valor límite trigonométrico
- ▷ 1pt valor límite función racional

C) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x}}{5x^2-3x+1}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x}}{5x^2-3x+1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4\left(4-\frac{3}{x^3}\right)}}{x^2\left(5-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{4-\frac{3}{x^3}}}{x^2\left(5-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4-\cancelto{0}{\frac{3}{x^3}}}}{5-\cancelto{0}{\frac{3}{x}}+\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{\sqrt{4}}{5} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Distribución de puntos:

- ▷ 1pt factor dentro de la raíz
- ▷ 1pt factor en el denominador
- ▷ 1pt separar en producto de raíces y simplificar $\sqrt{x^4}$
- ▷ 1pt simplificar la fracción
- ▷ 1pt evaluar el límite

3. Determine la derivada de la función

$$h(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{e^x} + \sqrt{\ln(x)}$$

No es necesario simplificar el resultado.

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{e^x}\right)' + (\sqrt{\ln(x)})' \\
&= \frac{(\operatorname{sen}(x^2))' \cdot e^x - \operatorname{sen}(x^2) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} + (\sqrt{\ln(x)})' \\
&= \frac{\cos(x^2) \cdot (x^2)' \cdot e^x - \operatorname{sen}(x^2) \cdot e^x}{(e^x)^2} + (\sqrt{\ln(x)})' \\
&= \frac{\cos(x^2) \cdot 2x \cdot e^x - \operatorname{sen}(x^2) \cdot e^x}{(e^x)^2} + (\sqrt{\ln(x)})' \\
&= \frac{\cos(x^2) \cdot 2x \cdot e^x - \operatorname{sen}(x^2) \cdot e^x}{(e^x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}} \cdot (\ln(x))' \\
&= \frac{\cos(x^2) \cdot 2x \cdot e^x - \operatorname{sen}(x^2) \cdot e^x}{(e^x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}} \cdot \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

Distribución de puntos:

- ▷ 1pt regla de la suma
- ▷ 1pt regla del cociente
- ▷ 1pt derivada seno
- ▷ 1pt regla de la cadena en el seno (derivada de x^2)
- ▷ 1pt derivada de la exponencial
- ▷ 1pt derivada de la raíz
- ▷ 1pt regla de la cadena en la raíz (derivada del logaritmo)

4. Considere la función p definida en su dominio máximo, con criterio $p(x) = e^{x+\ln(x+1)}$. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de p en el punto $(0, 1)$.

   La ecuación de la recta buscada tiene la forma $y = mx + b$. Como es tangente al gráfico de p en $(0, 1)$, entonces $m = p'(0)$. Vea que

$$
\begin{aligned}
p'(x) &= (e^{x+\ln(x+1)})' \\
&= e^{x+\ln(x+1)}(x + \ln(x + 1))' \\
&= e^{x+\ln(x+1)} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)
\end{aligned}
$$

   Así, $p'(0) = 2$, con lo que la ecuación es $y = 2x + b$. Para averiguar el valor de b, evaluamos en el punto $(0, 1)$:

$$1 = 2 \cdot 0 + b \quad \Rightarrow \quad b = 1.$$

Se concluye que la ecuación es $y = 2x + 1$.

Distribución de puntos:

- ▷ 1pt establecer que la pendiente (m) es $p'(0)$
- ▷ 2pts cálculo de $p'(x)$ (1pt derivada de la exponencial, 1pt regla de la cadena)
- ▷ 1pt evaluar $p'(0)$
- ▷ 1pt determinar el valor de la intersección (b)