UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

MATEM Matemática para la Enseñanza Media

PRIMER EXAMEN PARCIAL

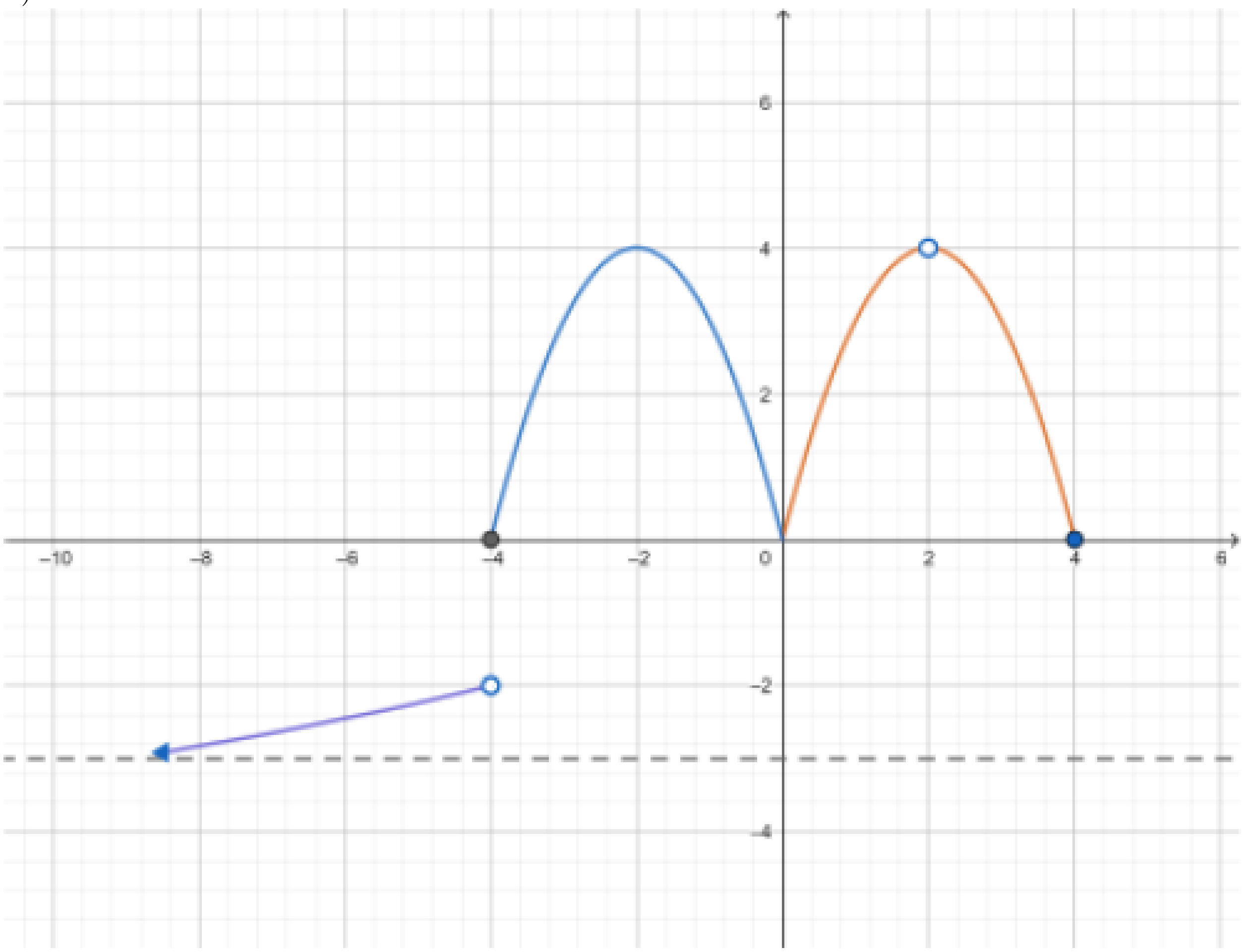
CÁLCULO

27 de abril de 2019

INSTRUCCIONES GENERALES

- Lea cuidadosamente, cada instrucción y pregunta, antes de contestar.
- Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra indeleble para resolver este examen.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado**, **éste no se calificará.**
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.
- **Este examen consta de dos partes: Respuesta breve y Desarrollo, para un total de 63 puntos**
- **El tiempo disponible para resolver la prueba es de tres horas.**

I Parte. Respuesta Breve. La siguiente figura corresponde a la gráfica de $f :]-\infty, 4]-\{2\} \to \mathbb{R}$. Conteste en su cuaderno de examen lo que se le solicita. (10 puntos, un punto cada respuesta correcta)



(a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 0$, $f'(-2) = 0$

(b) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$? Solo existe por la izquierda, por lo tanto no existe.

(c) ¿Cuál es un valor del dominio donde existe una discontinuidad evitable?
No hay valor en el dominio donde la discontinuidad sea evitable

(d) ¿Cuál es un valor del dominio donde existe una discontinuidad inevitable?
$x = -4$

(e) ¿Cuál es un valor del dominio donde la función no es derivable?
$x = 0$

(f) ¿Cuál es un valor del dominio donde $f'(x) = 0$?
$x = -2$

II Parte. Desarrollo. Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-|x|}{x}$ no existe porque los límites laterales son diferentes **(5 puntos)**

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x-|x|}{x} = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-|x|}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \left[(x-1)^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}})\right] = 0$ **(5 puntos)**

$-1 \leq \operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}) \leq 1, \forall x \neq 1$ (1 punto)

Como $(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$-(x-1)^2 \leq \left[(x-1)^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}})\right] \leq (x-1)^2$ (1 punto)

$0 = \lim\limits_{x\to 1} -(x-1) \leq \lim\limits_{x\to 1} \left[(x-1)^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}})\right] \leq \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$ (2 puntos)

Por el teorema de intercalación, $\lim\limits_{x\to 1} \left[(x-1)^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}})\right] = 0$ (1 punto)

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-2\cos(x)+\cos(2x)}{x^2} = -1$ **(7 puntos)**

Cuando $x \neq 0, \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-2\cos(x)+\cos(2x)}{x^2} = \frac{1-2+1}{0} = 0$, forma indeterminada (1 punto)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-2\cos(x)+\cos(2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-2\cos(x)+\cos^2(x)-sen^2(x)}{x^2} =$$

(1 punto)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-2\cos(x)+\cos^2(x)-(1-\cos^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos(x)+2\cos^2(x)}{x^2} =$$

(1 punto)

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos(x)(1-\cos(x))}{x^2} =$$

(1 punto)

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos(x)(1-\cos(x))}{x^2} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} =$$

(1 punto)

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos(x)\cdot \operatorname{sen}^2(x)}{(1+\cos(x))x^2} = \frac{-2\cdot 1}{1+1} = -1$$

(2 puntos)

ó,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-2\cos(x)+\cos(2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-2\cos(x)+\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} =$$

(1 punto)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))^2-\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} =$$

(1 punto)

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{(1-\cos(x))^2}{x^2} - \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\right] = 0-1 = -1$$

(5 puntos)

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2x-1}}{6x} = \frac{-1}{2}$ **(4 puntos)**

$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2(9+\frac{2}{x}+\frac{-1}{x^2})}}{6x}\right)$ (1 punto)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{|x|\sqrt{(9+\frac{2}{x}+\frac{-1}{x^2})}}{6x}\right)= \qquad \text{(1 punto)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x\sqrt{(9+\frac{2}{x}+\frac{-1}{x^2})}}{6x}\right)=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2} \qquad \text{(2 puntos)}$$

2. Considere la función f definida en su máximo dominio, tal que $f(x)=\begin{cases}\frac{ax}{x-2} & si \quad x<1\\ 3 & si \quad 1\leq x\leq 2\\ \frac{bx^2}{x^2+3} & si \quad x>2\end{cases}$

   Determine los parámetros a, y b para que la función f sea continua en $\mathbb{R}$. **(7 puntos)**

   a) $f(1)=3$
   b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-a \qquad \therefore -a=3\Rightarrow a=-3$ (3 puntos)
   c) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$
   d) $f(2)=3$
   e) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3 \qquad \therefore \frac{4b}{7}=3\Rightarrow b=\frac{21}{4}$ (3 puntos)
   f) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\frac{4b}{7}$

   Además f es continua en los intervalos $]-\infty,1[$, $]1,2[$ y $]2,+\infty[$ $\Rightarrow f$ es continua en todo $\mathbb{R}$ (1 punto)

3. Considere la función f definida en su máximo dominio, tal que $f(x)=\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$. **(8 puntos)**

   a) Analice la continuidad de f. De ser discontinua en un punto debe clasificar la discontinuidad. **(4 puntos)**

   f es continua en $\mathbb{R}-\{-3,3\}$

   En $x=-3$ es discontinua inevitable.

$$\lim_{x\to-3} f(x)=\lim_{x\to-3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to-3}\frac{x+2}{x+3}=\lim_{x\to-3} f(x)=\pm\infty$$

   En $x=3$

   $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+2}{x+3}=\frac{5}{6}$, es una discontinuidad evitable.

   b) Calcule las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de f.(si existen) **(4 puntos)**
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$, por lo tanto $y=1$ es una AH, $x=3$, es una AV

4. En cada caso calcule la primera derivada, no debe simplificar.

   a) $f(x) = \cos(2^{x^2} + e^{\operatorname{sen}(x)}) =$
   $f'(x) = -\operatorname{sen}(2^{x^2} + e^{\operatorname{sen}(x)})(2^{x^2}\ln(2)\cdot 2x + e^{\operatorname{sen}(x)}cos(x))$ (5 puntos)

   b) $y = \left[\sqrt[3]{x^3 - x}\cdot \sec(x^2+2x)\right]^3$ (6 puntos)

   Se puede realizar de distintas maneras:

$$y = (x^3 - x)\sec^3(x^2+2x)$$

$$y' = (3x^2-1)\sec^3(x^2+2x) + 3\sec^2(x^2+2x)\sec(x^2+2x)\cdot\tan(x^2+2x)(2x+2)(x^3-x)$$

5. Determine todos los puntos de la gráfica de la función $f(x) = 2\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}^2(x)$, definida en su dominio máximo, donde la recta tangente sea horizontal. (6 puntos)

$$f'(x) = 2\cos(x) + 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = 0$$

$$\iff 2\cos(x)(1+\operatorname{sen}(x)) = 0$$

$$\iff 2\cos(x) = 0 \quad \vee \quad 1+\operatorname{sen}(x) = 0$$

$$\iff \cos(x) = 0 \quad \vee \quad \operatorname{sen}(x) = -1$$

$$\iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z}, \qquad x = \frac{3\pi}{2}$$

$$(\frac{\pi}{2}+2k\pi, 3)\ y\ (-\frac{\pi}{2}+2k\pi, -1)k\in\mathbb{Z}$$